

# Tricky Elettrotecnica

(Copia preliminare prime 15 pagine ;-))

## . Prefazione

Nei vari corsi di elettrotecnica si approfondisce in diversi modi gli aspetti delle leggi elettro-dinamiche, ma a volte tale lezioni possono essere difficilmente comprese dai più, per un motivo o per un altro. L'intenzione di rendere pubblico questo materiale è per facilitare la lettura e l'apprendimento di questa affascinante materia, inoltre quando possibile dare dei metodi e delle chiavi di risoluzione più veloci per la risoluzione di esercizi e problemi, da cui il simpatico nome Tricky Elettrotecnica. La difficoltà più grande, nel scrivere questo materiale, è stata ed è tuttora visto che sono ancora in fase di scrittura, la suddivisione in capitoli. Questo perché la materia è di per sé legata, quindi tutte le nozioni sono necessarie per capire e comprendere i vari fenomeni e metodi risolutivi. La suddivisione in capitoli, quindi viene fatta sfruttando tutto il buon senso, ma ovviamente non si può assicurare la scelta ottimale. L'opera comunque a prescindere dalle difficoltà vuole essere il più possibile scorrevole in modo da non affaticare la lettura, visto e considerato che a far questo ci pensano già i veri libri di testo. Del resto non vuole essere un nuovo libro o un altro manuale, visto che mancano parecchie basi e conoscenze.

L'opera vuole essere di carattere pubblico per fini personali, per tutti gli altri fini si prega di contattare l'autore.

Ovviamente tutto ciò che è scritto non può in nessun modo ritenersi o essere ritenuto responsabile/causa di danneggiamenti a persone, animali e cose.

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

## CAPITOLO 1 (prime leggi per la bassa frequenza)

### . Introduzione

Come per tutte le cose, si necessita di porre alcune basi comuni, di dare un vocabolario e un linguaggio per capire di che cosa si sta parlando. Quindi è importante apprendere le nozioni principali e farsele proprie. Dato l'argomento cercherò di dare le definizioni le più semplici possibili, certo che comunque esiste un "sacco di bibliografia" in grado di risolvere qualunque dubbio di carattere teorico-pratico.

Tale capitolo sarà brevissimo, proprio perché l'esperienza scolastica mi ha insegnato che le leggi, le regole, i teoremi, sono spesso parti noiose e se possibile evitate da studenti e non solo ... ;-) ... anche da alcuni professori. Inoltre ritengo che all'inizio basta sapere solo lo stretto necessario, andando avanti, si potrà introdurre altri concetti.

... siete pronti ... ??? ... bene ...

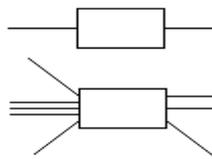
### . Le prime definizioni, regole, leggi.

Per la risoluzione di reti elettriche a regime stazionario e con frequenze basse, dove per basse si intende da zero a qualche migliaio di Hertz (0 – 1KHz, forse anche più ma è meglio stare stretti ...), è necessario sapere almeno le seguenti nozioni.

### . Definizioni.

Definiamo : Conduttore ideale quel conduttore che non presenta resistenza per qualunque forma e lunghezza che abbia, questa è una approssimazione della realtà, ma è molto utile e deve essere tenuta ben presente durante la risoluzione di reti.

Definiamo: Bi-Poli o N-Poli oggetti del tipo



Ciascuno di essi sono descritti da una legge univoca.

Definiamo: Nodi le giunzioni sul conduttore (su qualunque libro di elettrotecnica si trovano le definizioni più rigorose), spesso sono rappresentati graficamente come dei punti marcati.

Definiamo: Maglie il percorso chiuso che segue un ipotetico circuito della rete, attraverso i vari generatori e bipoli (o N-Poli).

Definiamo: Carica elettrica e la misuriamo con l'unità di misura

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

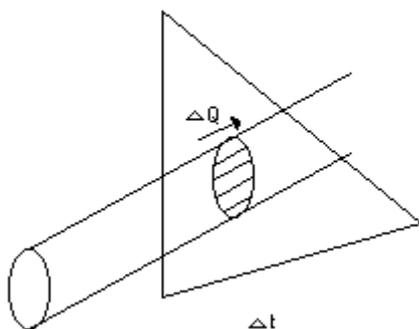
$$Q = [Coulunb] = [C]$$

Definiamo: Corrente elettrica il limite di:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

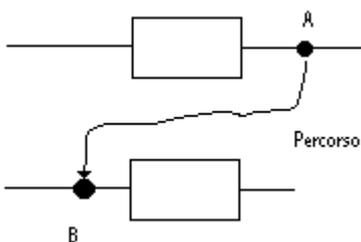
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \left[ \frac{C}{s} \right] = [Ampere] = [A]$$

Con tali formule si esprime che la corrente è la quantità di carica elettrica passante attraverso una superficie nell'unità di tempo.



Va notato come il segno dell'espressione di I debba essere coerente con il verso della misura di I, quindi una corrente negativa, in generale si intende che ha il verso opposto a quello ipotizzato.

Definiamo: Il lavoro fatto su di una carica elettrica, dove graficamente si può vedere:



e lo definiamo come:

$$V_{BA} = \int_A^B \vec{E} * \vec{U}_T * dl \{Fatto\_lungo\_il\_percorso\}$$

$$V_{BA} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{Q} * \vec{U}_T * dl = \frac{1}{Q} * \int_A^B \vec{F} * \vec{U}_T * dl$$

Dove si vede chiaramente che  $V_{BA}$  è il lavoro per portare la carica Q lungo il percorso AB.  $U_t$  è la componente di modulo unitario e parallela al campo elettrico E che è anche lui un vettore (Avendo entrambi modulo e verso). Lo strumento che misura il potenziale tra due punti è il voltmetro.

**. Relazioni.**

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

## Tricky Elettrotecnica

Per ogni bipolo (o N-Polo) della rete deve essere data una caratteristica senza ambiguità, inoltre:

- I conduttori possono essere alterati a piacimento senza che il funzionamento della rete elettrica ne risenta (dove alterati si intende allungati, allargati, MA NON TAGLIATI O ROTTI !!!!).
- La tensione tra due conduttori non dipende dal posto in cui la si misura (diretta conseguenza che il conduttore ideale non presenta resistenza).
- La tensione misurata lungo un percorso chiuso è nulla.

Diciamo che le correnti sono solenoidali (cioè non possono svanire nel nulla, in chimica si usa dire nulla si crea e nulla si distrugge, ma tutto si trasforma ;-)) e le tensioni sono irrotazionali (cioè lungo un percorso chiuso non c'è tensione, per comprendere questo basta pensare alla fisica, se compio un lavoro in un percorso chiuso, esempio salgo le scale e discendo, ho compiuto un lavoro nullo) diretta conseguenza delle loro definizioni. Possiamo anche definire la potenza elettrica misurata secondo il SI in watt, e si ottiene che:

$$P = V * I = \left[ \frac{J}{Q} \right] * \left[ \frac{Q}{s} \right] = \left[ \frac{J}{s} \right] = [W]$$

Lo strumento di misura per la potenza è il wattmetro.

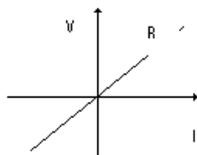
Un generico bipolo (es. una resistenza) deve avere una sua caratteristica che può essere espressa tramite un grafico o una relazione matematica non ambigua, genericamente si può scrivere la

caratteristica come  $\begin{cases} V = V(I) \\ I = I(V) \end{cases}$  prese con opportuno significato.

La relazione più semplice in bassa frequenza è la relazione tra corrente e tensione presenti su una resistenza, legate da:

$$\begin{cases} V = I * R \\ I = \frac{V}{R} \end{cases}$$

si noti la non ambiguità della relazione, si noti inoltre la linearità della stessa, la sua rappresentazione grafica può essere la seguente:

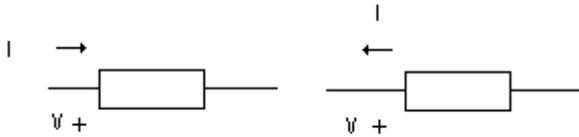


Le caratteristiche grafiche possono sembrare ridondanti o comunque poco utili, solo perché siamo abituati a pensare a bipoli lineari, dove le semplici relazioni matematiche sono sufficienti, ma in realtà sono uno strumento potente e di facile interpretazione, inoltre aiutano a stabilire delle convenzioni. Una delle convenzioni più usate è quella del carico e del generatore, dove si presume che la corrente elettrica entra o esca dal morsetto positivo a seconda che il bipolo rappresenti un carico o un generatore.

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

## Tricky Elettrotecnica



Inoltre tramite le caratteristiche grafiche possiamo vedere subito che se una caratteristica è compresa tra il primo e terzo quadrante del grafico (sempre che rispetti la convenzione del carico e del generatore) appartiene ad un utilizzatore, essendo la sua potenza sempre positiva, quindi è un bipolo passivo (non è in grado di generare potenza, ma solo di “assorbirla”). Viceversa è un generatore visto che la potenza assorbita è negativa. Anche qui, una potenza negativa deve essere intesa, non come lavoro negativo, ma come qualcosa che genera ...

Un bipolo si può comportare in diversi modi, ad esempio (rispettando le convenzioni del carico e del generatore):



In questo esempio si vede come un bipolo può comportarsi come un generatore o un componente passivo, e come la sua caratteristica non sia ambigua, per ogni valore di I o V esiste un solo punto di incrocio, è quindi una funzione dove ad ogni punto della variabile indipendente è associato uno e un solo punto della variabile dipendente.

### . Leggi.

Dal principio di conservazione dell'energia, ci sono vari personaggi che hanno posto le basi per la risoluzione delle reti elettriche tra questi vi sono i più citati:

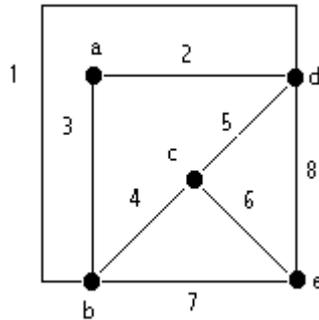
Kirchhoff che asserisce che la somma delle correnti entranti in un nodo è nulla (o allo stesso modo, che la somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti, personalmente preferisco la prima forma perchè è più concisa e generica ... ,ma è questione di gusti). Asserisce inoltre che la somma delle tensioni lungo un percorso chiuso (esempio una maglia) è nulla. Queste proprietà sono dirette conseguenze che una corrente è solenoidale ed una tensione è irrotazionale.

Telleghen viene spesso associato al bilancio di potenze in una rete, e asserisce che la somma delle potenze dissipate e generate in una rete è nulla, cioè che la potenza trasferita dai generatori deve per forza di cose essere “assorbita” dai carichi presenti dalla rete.

### . Topologia di una rete.

Come ultimo paragrafo voglio solo far notare come anche una rete elettrica abbia una propria forma, e in particolare una propria topologia. Spesso, per comodità di rappresentazione, rappresentiamo la nostra rete elettrica su di un piano (di solito un foglio ...). Conviene quindi prendere confidenza con tale rappresentazione visto che aiuta a semplificare il problema e a risolvere, appunto, la rete.

Una rete viene spesso rappresentata tramite una grafica dedicata che consente di implementare una sua efficace rappresentazione sul calcolatore o estrapolare utili teoremi o a facilitandone la lettura. Viene, spesso, rappresentata tramite grafi. Senza addentrarci troppo sulla struttura dei grafi (dove del resto c'è parecchia letteratura dedicata) possiamo vedere la rete come la seguente rappresentazione:



Indichiamo con  $n$  il numero di nodi e con  $l$  il numero di rami (o bipoli). Otteniamo in questo modo (se indichiamo con  $K_c$  il numero delle equazioni ai nodi e con  $K_v$  il numero delle equazioni ai lati) :

$$n = 5;$$

$$l = 8; \{ \text{equazione\_di\_nodi\_di\_correnti} \}$$

$$K_v = l - (n - 1) \{ \text{equazioni\_ai\_lati\_di\_tensioni} \}$$

$$\text{incognite} = \begin{cases} l \{ \text{tensioni} \} \\ l \{ \text{correnti} \} \end{cases}$$

$$n - 1 \Rightarrow \sum I = 0$$

$$l - (n - 1) = \sum V = 0$$

quindi  $_{si\_hanno} = l \rightarrow \text{equazioni\_dei\_bipoli}$

$$\text{equazione\_di\_un\_bipolo} = \begin{cases} V = V(I) \\ I = I(V) \end{cases}$$

La topologia della rete ci aiuta a trovare un metodo veloce di risoluzione delle reti, in particolare per risolvere la rete, oltre a utilizzare i principi di Kirchoff, possiamo anche adottare altre vie risolutive tra cui le più importanti sono il metodo del potenziale ai nodi e il metodo delle correnti di maglia o correnti fittizie.

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

## CAPITOLO 2

### (primi metodi risolutivi)

#### . Introduzione.

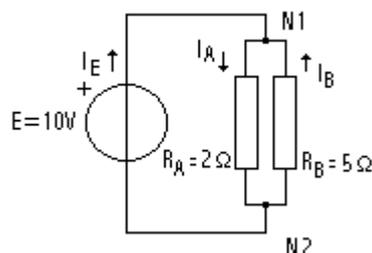
I metodi risolutivi servono per automatizzare il processo di risoluzione, facendo in questo modo diminuire le probabilità di commettere errori. L'automazione inoltre, consente di implementare tali metodi anche sul calcolatore, con tutte le positive conseguenze. È importante comunque conoscere e sapere bene i principi di Kirchoff, base di tutti i metodi risolutivi. Spesso un metodo risolutivo, applicato in casi particolare si può trasformare in "teorema". Spesso per la risoluzione dei circuiti farò uso di metodi "matriciali" per la loro potenza nel rappresentare e risolvere la "realtà".

#### . Metodo di Kirchoff.

Il metodo di Kirchoff si basa sul semplice studio topologico della rete, in particolare basta trovare  $n$  equazioni ai nodi di correnti, ed  $l-(n-1)$  equazioni alle maglie di tensione. Risulta quindi abbastanza chiaro che più che parlare di metodo, forse è meglio parlare di una delle tante possibili vie di soluzione. Penso che sia intuitivo che implementare al calcolatore un metodo così è parecchio difficoltoso, e del resto per noi umani, risolvere  $n$  equazioni è abbastanza fastidioso, per non dire altro ...

Consiglio comunque di esercitarsi un poco con questo metodo, magari su reti semplici, per capire, meglio prendere confidenza nel cercare le correnti e tensioni. Di seguito propongo un banale circuito, per far vedere una delle possibili vie di risoluzione.

#### . Primo circuito.



Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

Prima di iniziare a risolvere un circuito elettrico, si deve porre i versi delle correnti, in modo da distinguerle correttamente. Il primo circuito è banale, ma consente di porre le prime basi e le prime vie di risoluzione.

Osserviamo che ai capi dei due unici nodi  $N_1$  e  $N_2$  è presente una tensione. La tensione che possiamo chiamare  $V_{N_1-N_2}$  è pari anche alla  $E$  del generatore.

Se seguiamo il metodo K, dobbiamo porre  $n - 1$  equazioni ai nodi ed  $l-n+1$  equazioni alle maglie, in questo caso abbiamo sì due maglie, ma la tensione di ciascuna maglia imposta dal generatore ideale di tensione, quindi risulta semplice trovare le seguenti relazioni:

$$V_{N_1N_2} = E = 10[V];$$

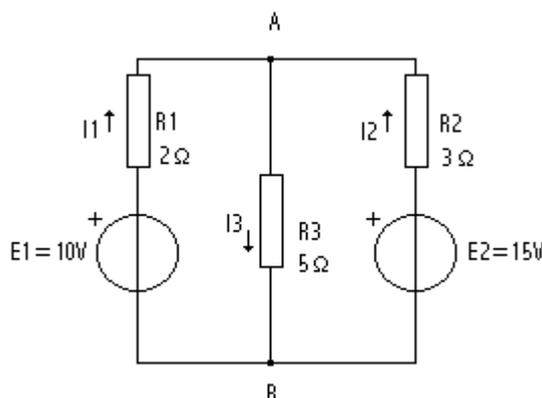
$$I_A = \frac{V_{N_1N_2}}{R_A} = \frac{10 [V]}{2 [\Omega]} = 5[A];$$

$$-I_B = \frac{V_{N_1N_2}}{R_B} \rightarrow I_B = -\frac{V_{N_1N_2}}{R_B} = -\frac{10 [V]}{5 [\Omega]} = -2[A];$$

$$I_E = I_A - I_B = 5[A] - (-2[A]) = 7[A];$$

Una cosa importante è quella di tenere presenti i versi e di mantenere la coerenza nell'utilizzo dei segni delle correnti.

**. Secondo circuito.**



Questo circuito risulta essere già più “divertente” e più consono alla realtà. I rami contenenti i generatori, visto che sono formati dalla serie di un generatore di tensione e una resistenza, possiamo considerarli come dei generatori reali di tensione, rappresentati dalla loro FEM (Forza Elettro Motrice) e dalla loro resistenza interna ...

Per risolvere il circuito, dove per risolvere si intende trovare tutte le correnti e tensioni, basta risolvere un sistema, in particolare dovremmo scrivere:

$$\left. \begin{aligned} I_3 &= I_1 + I_2 \{n - 1 \text{ _ } Kc\} \\ V_{AB} &= E_1 - R_1 * I_1 \\ V_{AB} &= E_2 - R_2 * I_2 \end{aligned} \right\} l - n + 1 \text{ _ } Kv$$

Non ci resta che porre le tre equazioni a sistema, e trovare la soluzione. Per coerenza conviene trasformare  $V_{AB}$  come prodotto di resistenza per corrente, essendo  $V_{AB}$  posta ai capi di una

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

resistenza la cui corrente è cercata. Ovviamente nulla toglie che si sarebbe potuto risolvere il sistema mantenendo  $V_{AB}$ .

$$V_{AB} = R_3 * I_3$$

$$\begin{cases} I_3 - I_2 - I_1 = 0 \\ R_3 * I_3 + R_1 * I_1 = E_1 \\ R_3 * I_3 + R_2 * I_2 = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.193 & 0.096 & 0.064 \\ -0.322 & -0.161 & 0.225 \\ -0.483 & 0.258 & -0.161 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.935 \\ 1.774 \\ 0.161 \end{vmatrix}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1.774[A] + 0.161[A] = 1.935[A]$$

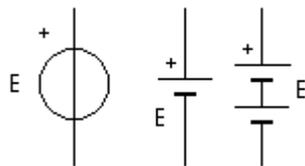
$$V_{AB} = R_3 * I_3 = 5[\Omega] * 1.935[A] = 9.675[V]$$

Una cosa importante da tenere presente quando si risolvono i sistemi, è quello di verificare immediatamente la validità della soluzione. Ad esempio come prima cosa ho cercato subito se la somma di  $I_1$  con  $I_2$  mi desse il valore di  $I_3$ . Non essendo ovviamente sufficiente tale calcolo per dire che il sistema, quindi il circuito, sia risolto correttamente, conviene calcolare  $V_{AB}$  tramite la legge di OHM generalizzata, quindi:

$$V_{AB} = E_1 - R_1 * I_1 = 10[V] - 2[\Omega] * 0.161[A] = 9.678[V]$$

A parte una approssimazione sulla terza cifra dopo la virgola il risultato è corretto. Una cosa importante quindi è saper verificare i calcoli.

Fino ad ora abbiamo usato sempre generatori di tensione, cioè generatori in grado di imporre una tensione indipendentemente dalla corrente erogata o assorbita. Ci sono varie simbologie per indicare i generatori di tensione, e le più usate sono schematizzate qui di seguito :

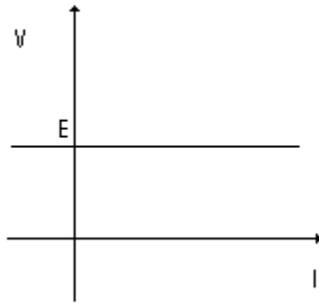


ovviamente si tratta di uno schizzo per rendere l'idea di come spesso sono disegnati a mano. Del resto tale simbologia è presente nei cad elettrici ed è quotata secondo normativa vigente.

Soffermandoci ancora un po' sui generatori di tensione, voglio far risaltare la loro caratteristica:

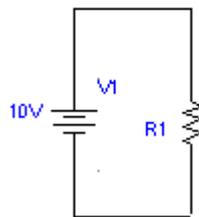
Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

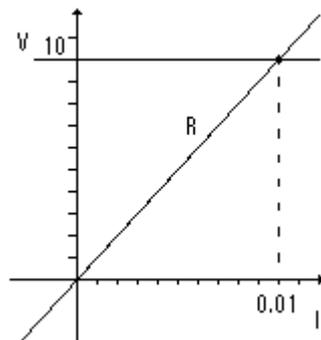


Dove si vede come un generatore ideale di tensione può assorbire o erogare qualunque corrente mantenendo costante la sua tensione. Un generatore ideale di tensione, può assorbire una corrente, spesso nella realtà succede questo, basta pensare a quando si ricaricano le batterie. Le batterie sono generatori di tensione, e questi possono erogare o assorbire corrente a seconda del caso ... ma mantengono sempre la stessa tensione ai loro morsetti. Voglio inoltre far vedere come si può risolvere graficamente un circuito elettrico semplice:

Generatore e resistenza in serie



dove si vuole trovare la tensione ai capi della resistenza e la corrente che circola nel circuito:

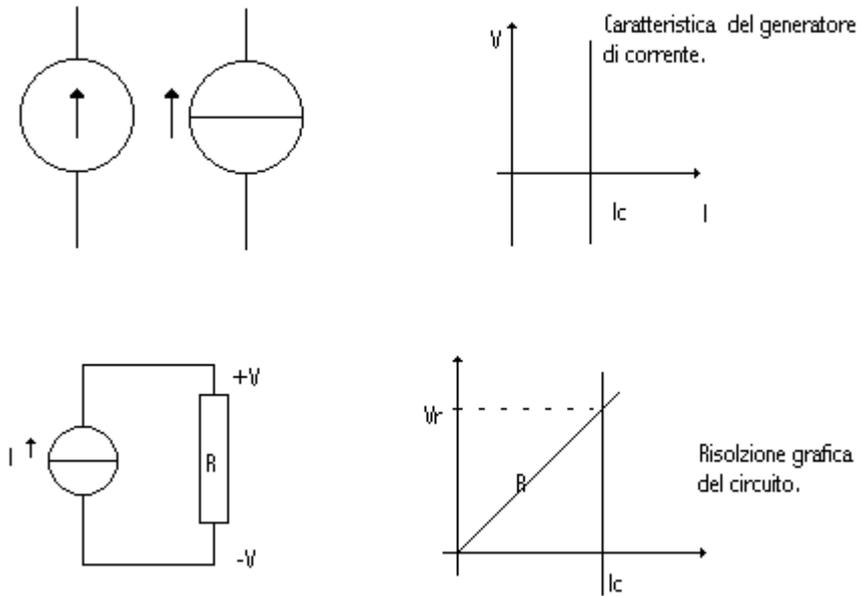


Come si vede la risoluzione grafica è equivalente alla soluzione del sistema intrinseco generatore serie resistenza.

Oltre ai generatori di tensione esistono anche i generatori di corrente. I generatori di corrente sono il duale dei generatori di tensione, cioè sono in grado di erogare una corrente e di imporla. Per esperienza questi generatori sono poco intuitivi perché dovendo imporre una corrente devono sempre essere usati "cortocircuitati" o per lo meno a circuito chiuso. La rappresentazione grafica e la caratteristica è di seguito rappresentata:

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

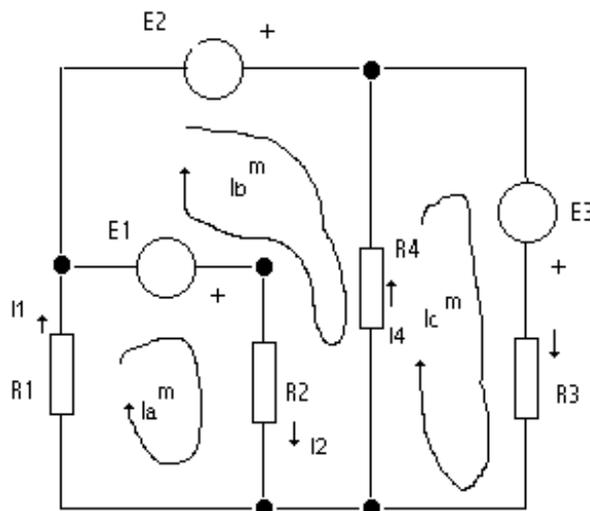


Come si può notare i principi risolutivi non sono differenti, basta solo ricordarsi che un generatore di corrente impone una corrente e fa in modo di mantenerla costante qualunque sia il carico ad esso applicato.

Dopo aver visto la complessità del metodo, dovuta più che alla difficoltà di trovare le equazioni alla difficoltà nel risolvere in tempi brevi sistemi a molte incognite, conviene vedere se esistono metodi di risoluzione alternativi.

### . Correnti di maglia.

Il metodo delle correnti di maglia si basa sul concetto di pensare che in una maglia vi circoli una corrente fittizia, questo metodo si basa sulla intrinseca natura della sovrapposizione degli effetti (applicabile solo a sistemi lineari). Senza dilungarci troppo, diciamo che la corrente effettiva che circola su di un ramo è poi pari alla somma delle correnti di maglia prese con segno che fittiziamente circolano in quel ramo. Uno degli esempi più classici in letteratura, per spiegare il metodo in modo pratico è un circuito del tipo:



Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

Il primo passo per risolvere l'esercizio è di porre tutti i versi alle correnti e alle correnti di maglia. Quindi si prosegue con la stesura delle equazioni:

$$I_a^m (R_2 + R_1) - I_b^m R_2 = E_1$$

$$I_b^m (R_4 + R_2) - I_a^m R_2 - I_c^m R_4 = E_2 - E_1$$

$$I_c^m (R_3 + R_4) - I_b^m R_4 = E_3$$

Trovate le relazioni non resta altro che metterle a sistema e risolvere secondo uno dei metodi di risoluzione dei sistemi lineari.

$$\begin{cases} I_a^m (R_2 + R_1) - I_b^m R_2 = E_1 \\ I_b^m (R_4 + R_2) - I_a^m R_2 - I_c^m R_4 = E_2 - E_1 \\ I_c^m (R_3 + R_4) - I_b^m R_4 = E_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} R_2 + R_1 & R_2 & 0 \\ -R_2 & R_4 + R_2 & R_4 \\ 0 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_a^m \\ I_b^m \\ I_c^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

Voglio solo far notare come la rappresentazione matriciale possa essere un utile strumento per la risoluzione e la rappresentazione della rete. Voglio inoltre far notare come anche la rappresentazione matriciale soddisfi la legge di OHM  $R * I = V$ . Infatti si noti come la matrice di resistenze moltiplichi la matrice delle correnti (in questo caso vettore colonna delle correnti) per ottenere una matrice (vettore colonna) di tensioni.

A questo punto non ci resta che trovare le correnti effettive in tutti i rami.

Seguendo lo schema si può procedere a scrivere che:

$$I_1 = I_a^m$$

$$I_2 = I_a^m - I_b^m$$

$$I_3 = I_c^m$$

$$I_4 = I_c^m - I_b^m$$

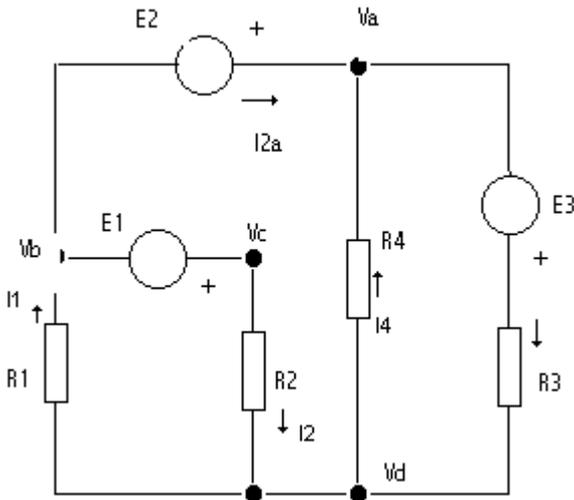
In questo modo si è risolto la rete. L'applicazione del metodo di risoluzione tramite correnti di maglia ha ridotto il numero di equazioni di sistema rispetto al classico metodo di Kirchhoff. Ricordare che le correnti di maglia sono un'astrazione, non è la realtà, quindi sono correnti puramente immaginarie, appunto fittizie.

## . Potenziale ai nodi.

Il metodo dei potenziali ai nodi si basa sul trovare i rispettivi potenziali dei nodi, quindi applicando la legge di OHM generalizzata si può poi ricavarci tutti i parametri della rete. Nella pratica il metodo è molto utile, perché spesso serve sapere il potenziale di qualche parte del circuito rispetto a un riferimento (ad esempio la terra o la massa). Ad esempio, disponendo di una rete e di un voltmetro si può risolvere la rete misurando solo i potenziali riferiti a massa, quindi con la legge generalizzata di OHM risolvere il circuito. Questo metodo viene spesso usato per i circuiti elettronici, per tararli o verificarli.

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it



Riprendendo il circuito di prima proviamo a vedere cosa succede considerando i potenziali riferiti ai nodi. Prima di far questo stabiliamo subito come viene letta e fatta una differenza di potenziale. Di regola diciamo che la differenza di potenziale viene scritta come  $V_{AB} = V_A - V_B$ . Se ci riferiamo alla figura otteniamo che ad esempio  $V_{AD} = -I_4 * R_4 = V_A - V_D$ .

Proviamo quindi a scrivere tutte le equazioni ai nodi del circuito:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A - V_D = -R_4 * I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{V_D - V_A}{R_4} \\ V_A - V_D = -E_3 + I_3 * R_3 \Rightarrow I_3 = \frac{V_A - V_D + E_3}{R_3} \\ V_A - V_B = E_2 \\ V_B - V_D = -I_1 * R_1 \Rightarrow I_1 = \frac{V_D - V_B}{R_1} \\ V_B - V_D = -E_1 + I_2 * R_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_B - V_D + E_1}{R_2} \\ I_3 = I_{2a} + I_4 \\ I_1 = I_{2a} + I_2 \end{array} \right.$$

A questo punto imponiamo che il nodo  $V_D = 0$  Volt, ossia sia il nostro riferimento.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_A + E_3}{R_3} = I_{2a} + \frac{V_A}{R_4} \\ -\frac{V_B}{R_1} = I_{2a} + \frac{V_B + E_1}{R_2} \\ V_A - V_B = E_2 \end{array} \right.$$

Ci siamo ridotti quindi a 3 equazioni e 3 incognite, quindi (senza entrare in troppi particolari e rompicapi) riteniamo il sistema risolvibile.

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_A + E_3}{R_3} + \frac{V_A}{R_4} = I_{2a} \\ + \frac{V_B}{R_1} + \frac{V_B + E_1}{R_2} = -I_{2a} \\ V_A - V_B - E_2 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{equazione per il nodo A} \\ \text{equazione per il nodo B2a} \\ \text{equazioni rimanenti} \end{array}$$

Riscriviamo le equazioni per estrapolare una regola di scrittura :

$$V_A \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + \frac{E_3}{R_3} = I_{2a}$$

$$V_B \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{E_1}{R_2} = -I_{2a}$$

$$V_A - V_B - E_2 = 0$$

Che in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & 0 & \frac{E_3}{R_3} \\ 0 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{E_1}{R_2} \\ 1 & -1 & E_2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{2a} \\ -I_{2a} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Notiamo la forma della matrice che in questo caso è del tipo :

$$\begin{vmatrix} G_{2-3} & 0 & I_{cc3} \\ 0 & G_{1-2} & I_{cc1} \\ 1 & -1 & E_2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{2a} \\ -I_{2a} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{Dove con G si intende la conduttanza e con Icc la corrente del generatore...}$$

L'esempio, quindi fornisce una regola su come trovare velocemente le equazioni ai nodi. Infatti, prima di tutto si definisce quale nodo sia il nostro riferimento, poi per ciascuna maglia si moltiplicherà il potenziale del nodo considerato per la somma delle conduttanze che vi stanno vicino e si sottrarrà per i potenziali dei nodi adiacenti moltiplicati per la conduttanza che li unisce. Anche se detta così sembra complessa, facendo un po' di pratica diventa molto semplice. Un trucco agli inizi è quello di trasformare i generatori di tensione reali in equivalenti di corrente reali, e il metodo diventa ancor più chiaro.

Per il momento non presento altri esempi perché le nozioni in teoria adesso le si hanno, del resto andando avanti ci saranno altri circuiti in cui si utilizzerà questo metodo.

Prima di terminare però ritengo utile (del resto anche la maggior parte della letteratura a volte lo fa notare) è come il metodo delle correnti fittizie e il potenziale ai nodi siano tra loro duali (a parte alcuni circuiti come quello che ho proposto) cioè come le matrici di risoluzione siano tra loro legate in questo modo :

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori personali dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it

$$\begin{array}{c|c} R & \dots \\ \vdots & \ddots \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ * \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} I \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} V \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \text{ Correnti fittizie}$$

$$\begin{array}{c|c} G & \dots \\ \vdots & \ddots \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ * \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} V \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} I \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \text{ Potenziale ai nodi}$$

dove i sistemi (rappresentati da una rappresentazione simbolica a matrici) indicano come nel metodo delle correnti fittizie le incognite sono le correnti, mentre nel metodo ai potenziali ai nodi le incognite sono le tensioni.

Il seguente materiale è frutto dell'esperienza personale, di appunti e lavori e studi dell'autore. Questo materiale può essere usato solo a fini personali, per qualunque altro uso contattate l'autore, ovviamente anche per correzioni ed errori. Essendo materiale a puro uso personale l'Autore non è responsabile di errori tipografici, citazioni inesattezze, concetti errati o male espressi o qualunque altra causa che possa provocare danno a persone, animali e cose.

Copy right 2003, Federico Milan .  
e-mail: milan1@interfree.it